**Séries numériques : corrigé**

**Partie I**

**1) a)** Critère des séries alternées: la suite $(\frac{1}{p})$ décroît et tend vers 0 donc la série de terme général $\frac{(-1)^p}{p}$ converge et $|R_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

**1) b)** $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{q} \frac{(-1)^p}{p} = -\sum_{p=n+1}^{q} \int_0^1 (-1)^{p-1} x^{p-1}\, dx = -\int_0^1 \frac{(-1)^n x^n - (-1)^q x^q}{1+x}\, dx$

$\displaystyle= (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx + (-1)^q \int_0^1 \frac{x^q}{1+x}\, dx$

On fait tendre $q$ vers $+\infty$:

$\displaystyle\sum_{p=n+1}^{q} \frac{(-1)^p}{p} \longrightarrow \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$ (série convergente)

$\displaystyle\left|(-1)^q \int_0^1 \frac{x^q}{1+x}\, dx\right| \leq \int_0^1 x^q\, dx = \frac{1}{q+1} \longrightarrow 0$

Conclusion : $\displaystyle R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$

**2) a) On intègre par parties en intégrant $x^{n-1}$ et en dérivant $\frac{x}{1+x}$:**

$\displaystyle(-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx = (-1)^{n+1} \left[\frac{x^n}{n} \frac{x}{1+x}\right]_0^1 - \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\, dx$

$\displaystyle= \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \frac{(-1)^n}{n} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\, dx$

**or** $\displaystyle\left|\frac{(-1)^n}{n} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\, dx\right| \leq \frac{1}{n} \int_0^1 x^{n-1}\, dx = \frac{1}{n^2}$

**donc** $\displaystyle\frac{(-1)^n}{n} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\, dx = O(\frac{1}{n^2})$

**On a bien** $R_n = k\frac{(-1)^{n+1}}{n^\beta} + O(\frac{1}{n^{\beta+1}})$ **avec** $k = \frac{1}{2}$ **et** $\beta = 1$

**2) b) La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge absolument donc la série de terme général $R_n$ converge.**

**3)** $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} R_p = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{p+1} \int_0^1 \frac{x^p}{1+x}\, dx = \int_0^1 \sum_{p=0}^{n} (-1)^{p+1} \frac{x^p}{1+x}\, dx$

$\displaystyle= \int_0^1 \Big(\frac{-1-(-1)^{n+2} x^{n+1}}{(1+x)^2}\Big)\, dx$

$\displaystyle= -\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\, dx$

**De plus** $\displaystyle-\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = -\frac{1}{2}$

**et** $\displaystyle\left|(-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\, dx\right| \leq \int_0^1 x^{n+1}\, dx = \frac{1}{n+2}$

**donc** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\, dx = 0$

**et** $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \frac{-1}{2}$**.**

## Partie II

**1) a)** **On montre que la suite** $x_n = U_n - \int_0^n \frac{dx}{\sqrt{x}}$ **est décroissante et minorée:**

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq 0$$

$$x_n = \sum_{p=1}^{n-1} \left( \frac{1}{\sqrt{p}} - \int_p^{p+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \right) + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$$

**La suite** $(x_n)$ **est donc convergente. En notant** $L+2$ **sa limite on obtient**

$$\lim_{n \to +\infty} \left( Un - \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} \right) = L + 2$$

**1) b)** **Pour** $\theta > 1$, $\sum \frac{1}{p^\theta}$ **converge donc** $\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta}$ **existe.**

$$\int_p^{p+1} \frac{dx}{x^\theta} \leq \frac{1}{p^\theta} \leq \int_{p-1}^p \frac{dx}{x^\theta}$$

$$\int_{n+1}^{q+1} \frac{dx}{x^\theta} \leq \sum_{p=n+1}^{q} \frac{1}{p^\theta} \leq \int_n^q \frac{dx}{x^\theta}$$

**On fait tendre** $q$ **vers** $+\infty$**:**

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\theta} \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\theta}$$

$$\frac{(n+1)^{1-\theta}}{\theta - 1} \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta} \leq \frac{n^{1-\theta}}{\theta - 1}$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-\theta} \leq \frac{\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta}}{\frac{n^{1-\theta}}{\theta-1}} \leq 1$$

**or** $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-\theta} = 1$ **donc**

$\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta}$ **est équivalent à** $\frac{n^{1-\theta}}{\theta - 1}$ **quand** $n$ **tend vers l'infini.**

**2) a)** $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Big( 1 - 2(n+1) + 2n\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \Big)$

$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Big( 1 - 2(n+1) + 2n(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \Big) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Big( \frac{-1}{4n} + o(\frac{1}{n}) \Big)$

**donc**

$v_{n+1} - v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{-1}{4n^{\frac{3}{2}}}$.

**On en déduit que la série** $\sum v_{n+1} - v_n$ **est convergente, de plus son terme général est équivalent à** $\frac{-1}{4n^{\frac{3}{2}}}$ **et donc négatif, au moins à partir d'un certain rang.**

**On a donc** $\sum_{p=n}^{+\infty} v_{p+1} - v_p \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{-1}{4p^{\frac{3}{2}}}$.

**De la question II 1)a) on déduit immédiatement que** $\lim_{p\to+\infty} v_p = 0$ **et donc** $\sum_{p=n}^{+\infty} v_{p+1} - v_p = -v_n$

**De la question II 1)b) on déduit que** $\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{-1}{4p^{\frac{3}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2\sqrt{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2\sqrt{n}}$.

**On a donc bien** $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

**2) b)** **On procède de la même façon en posant** $w_n = v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}}$

$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{16n^{\frac{5}{2}}}$

$w_n = \sum_{p=n}^{+\infty}(w_p - w_{p+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{-1}{16n^{\frac{5}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{24n\sqrt{n}}$

**Donc** $v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{24n\sqrt{n}}$

**On a bien** $U_n = A\sqrt{n} + B + \frac{C}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}})$ **avec** $A = 2$, $B = L$, **et** $C = \frac{1}{2}$.

**3) a)** $S$ **existe car d'après le critère des séries alternées, la série** $\sum \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$ **converge.**

**3) b)** $r_{2n} = S - \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} = S - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} = S - \sqrt{2}U_n + U_{2n}$

**3) c)** **En utilisant la formule trouvée au II 2) b), on obtient** $r_{2n} = S + (1-\sqrt{2})L - \frac{1}{2\sqrt{2n}} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}})$.

$a = S + (1-\sqrt{2})L$, $b = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

**La série** $\sum \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$ **converge, donc** $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$ **et** $S = (\sqrt{2}-1)L$.

$r_{2n} = \frac{-1}{2\sqrt{2n}} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}}) = \frac{-1}{2\sqrt{2n}} + O(\frac{1}{2n\sqrt{2n}})$

$r_{2n+1} = r_{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \frac{-1}{2\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}})$

**or** $\frac{-1}{2\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{2(\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1})\sqrt{2n}\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}})$

**donc** $r_{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}}) = \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} + O(\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n+1}})$

**On obtient pour tout** $n > 0$, $r_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}})$

**de plus** $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}}$ **converge et** $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ **converge absolument donc la série** $\sum r_n$ **est convergente.**

## Partie III

**1)** **Pour** $0 < a < b$, **on fait le changement de variable** $t = pu$ **dans l'intégrale** $\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

$\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,dt = p^x \int_{a/p}^{b/p} u^{x-1}e^{-pu}\,du$.

**On fait ensuite tendre** $a$ **vers 0 puis** $b$ **vers** $+\infty$.

**On obtient** $\Gamma(x) = p^x \int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-pu}\,du$, **la fonction** $\Gamma$ **ne s'annule pas sur** $]0,+\infty[$ **et donc**

$\dfrac{1}{p^x} = \dfrac{1}{\Gamma(x)} \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-pt}\, dt$.

**2)** **La série** $\dfrac{(-1)^p}{p^x}$ **converge donc** $q_n$ **est bien définie pour tout** $x > 0$.

$t \mapsto \dfrac{t^{x-1}e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}$ **est continue sur** $]0, +\infty[$

**En 0,** $\dfrac{t^{x-1}e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}} \sim \dfrac{t^{x-1}}{2}$ **et** $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{2}$ **est intégrable au voisinage de 0 pour tout** $x > 1$.

**En** $+\infty$, $\dfrac{t^{x-1}e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}} = o(e^{-t})$ **et** $t \mapsto e^{-t}$ **est intégrable au voisinage de** $+\infty$.

**On en déduit que l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t^{x-1}e^{-pt}}{1+e^{-t}}\, dt$ **existe pour tout** $x \in ]0, +\infty[$ **et pour tout** $n \in \mathbf{N}$.

$$\sum_{p=n+1}^{q} \frac{(-1)^p}{p^x} = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} t^{x-1} \sum_{p=n+1}^{q} \big((-1)^p e^{-pt}\big)\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} t^{x-1} \frac{(-1)^{n+1}e^{-(n+1)t} - (-1)^{q+1}e^{-(q+1)t}}{1+e^{-t}}\, dt$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}\, dt + \frac{(-1)^q}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-(q+1)t}}{1+e^{-t}}\, dt$$

**On fait ensuite tendre** $q$ **vers** $+\infty$

$$\sum_{p=n+1}^{q} \frac{(-1)^p}{p^x} \longrightarrow \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^x}$$

$$\left| \frac{(-1)^q}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-(q+1)t}}{1+e^{-t}}\, dt \right| \le \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-(q+1)t}\, dt = \frac{1}{(q+1)^x} \longrightarrow 0.$$

**On obtient :** $q_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(x)} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t^{x-1}e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}\, dt$

**3)** $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} q_p(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+e^{-t}} \sum_{p=0}^{n} \big((-1)^{p+1} e^{-(p+1)t}\big)\, dt$

$$= \frac{-1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\, dt - \frac{(-1)^n}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-(n+2)t}}{(1+e^{-t})^2}\, dt$$

**puis on fait tendre** $n$ **vers** $+\infty$:

$$\left| \frac{(-1)^n}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-(n+2)t}}{(1+e^{-t})^2}\, dt \right| \le \frac{(1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-(n+2)t}\, dt = \frac{(1}{\Gamma(x)} \frac{1}{(n+1)^x} \longrightarrow 0.$$

**Donc la série de terme général** $q_n$ **converge et a pour somme:** $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} q_p(x) = \frac{-1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\, dt$

**4)** **Pour** $x = 1$, **on retrouve** $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} R_p = \sum_{p=0}^{+\infty} q_p(1) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\, dt = \left[\frac{-1}{1+e^{-t}}\right]_0^{+\infty} = \frac{-1}{2}$

## Partie IV

**1) a)** $f(t) = \dfrac{1}{t^x}$ **pour** $x > 0$

**1) b)** $x_n$ **est définie car d'après le critère des séries alternées, la série** $\sum (-1)^p f(p)$ **converge.**

**2)** $\displaystyle 2x_n - (-1)^{n+1} f(n+1) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p) + \sum_{p=n+2}^{+\infty} (-1)^p f(p)$

$$= \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p) + \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^{p+1} f(p+1) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \big(f(p) - f(p+1)\big).$$

**On en déduit** $x_n = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}f(n+1) + \frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p\big(f(p)-f(p+1)\big)$.

**La série** $\sum(-1)^{n+1}f(n+1)$ **converge.**

$f$ **est décroissante, convexe et de limite nulle en** $+\infty$ **donc la suite** $\big(f(p)-f(p+1)\big)$ **est positive, décroissante et de limite nulle en** $+\infty$**. Daprès le critère des séries alternées, on peut majorer :**

$$\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p\big(f(p)-f(p+1)\big)\right| \leq f(n+1)-f(n+2).$$

**Or la série** $\sum\big(f(n+1)-f(n+2)\big)$ **converge car** $\lim_{+\infty} f = 0$. $\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p\big(f(p)-f(p+1)\big)$ **est donc le terme général d'une série absolument convergente.**

**On en déduit que la série** $\sum x_n$ **converge.**

**3)** **On sait de plus que** $f(n+1)$ **est équivalent à** $f(n+2)$ **lorsque** $n$ **tend vers** $+\infty$ **ce qui s'écrit** $f(n+1)-f(n+2) = o(f(n+1))$.

**On obtient alors** $x_n = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}f(n+1) + o(f(n+1))$.

$x_n$ **est donc équivalent à** $\frac{1}{2}(-1)^{n+1}f(n+1)$ **lorsque** $n$ **tend vers** $+\infty$.

## $\boxed{\textbf{Partie V}}$

$$q_0(x) = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^x}$$

**1)** **La fonction** $x \mapsto \frac{(-1)^p}{p^x}$ **est continue sur** $]0,+\infty[$

**Pour tout réel** $a > 0$ $\sup_{x\in[a,+\infty[}\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^x}\right| \leq \sup_{x\in[a,+\infty[}\frac{1}{(n+1)^x} = \frac{1}{(n+1)^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

**La série** $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^x}$ **converge donc uniformément sur tout intervalle** $[a,+\infty[$ **avec** $a > 0$

**Sa somme** $q_0$ **est donc continue sur** $]0,+\infty[$.

**2)** **La série** $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^x}$ **converge simplement sur** $]0,+\infty[$

**La fonction** $x \mapsto \frac{(-1)^p}{p^x}$ **est de classe** $C^1$ **sur** $]0,+\infty[$ **de dérivée** $x \mapsto \frac{(-1)^{p+1}\ln p}{p^x}$

**Pour tout réel** $a > 0$ **et pour tout** $x \in [a,+\infty[$**, la suite** $(\frac{\ln p}{p^x})$ **est positive et décroissante pour** $p > e^{1/a}$.

**En utilisant le critère des séries alternées, on obtient donc pour** $p > e^{1/a}$

$$\sup_{x\in[a,+\infty[}\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p+1}\ln p}{p^x}\right| \leq \sup_{x\in[a,+\infty[}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

**La série** $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p+1}\ln p}{p^x}$ **converge donc uniformément sur tout intervalle** $[a,+\infty[$ **avec** $a > 0$

**On en déduit que** $q_0$ **est de classe** $C^1$ **sur** $]0,+\infty[$.

**3)** **On a vu que la série** $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^x}$ **converge uniformément sur l'intervalle** $[1,+\infty[$ **donc**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^p}{p^x}=\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(-1)^p}{p^x}=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}q_0(x)=-1$.

4) **En utilisant IV 2) avec $f(t)=\dfrac{1}{t^x}$, on écrit**

$q_0(x)=\sum\limits_{p=1}^{n}\dfrac{(-1)^p}{p^x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^x}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p\Big(\dfrac{1}{p^x}-\dfrac{1}{(p+1)^x}\Big)$

**puis on fait tendre $x$ vers 0:**

$\lim\limits_{x\to0}\sum\limits_{p=1}^{n}\dfrac{(-1)^p}{p^x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^x}=\sum\limits_{p=1}^{n}(-1)^p+\dfrac{1}{2}(-1)^{n+1}=\dfrac{-1}{2}$

**de même qu'en IV 2), on majore:**

$\left|\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p\Big(\dfrac{1}{p^x}-\dfrac{1}{(p+1)^x}\Big)\right|\leq\dfrac{1}{(n+1)^x}-\dfrac{1}{(n+2)^x}$

$=\exp(x\ln(n+1))-\exp(x\ln(n+2)\underset{x\to0}{\sim}x\ln(n+1)-x\ln(n+2)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$

$q_0$ **admet donc un prolongement par continuité en 0 en posant** $q_0(0)=\frac{-1}{2}$

5)a) **On reprend, pour n=0, la formule de la question 4):**

$q_0(x)=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\Big(\dfrac{1}{p^x}-\dfrac{1}{(p+1)^x}\Big)=q_0(0)+\dfrac{x}{2}\sum\limits_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\displaystyle\int_p^{p+1}\dfrac{dt}{t^{x+1}}$.

5)b) $\dfrac{q_0(x)-q_0(0)}{x}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\displaystyle\int_p^{p+1}\dfrac{dt}{t^{x+1}}$.

**Pour calculer la limite en 0 de cette expression, montrons que la série** $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\displaystyle\int_p^{p+1}\dfrac{dt}{t^{x+1}}$ **converge uniformément sur** $]0,+\infty[$.

**La fonction** $t\mapsto\dfrac{1}{t^{x+1}}$ **est décroissante et de limite nulle en $+\infty$ donc la suite** $\displaystyle\int_p^{p+1}\dfrac{dt}{t^{x+1}}$ **est décroissante et de limite nulle. On peut donc appliquer le critère des séries alternées pour majorer le reste de la série** $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\displaystyle\int_p^{p+1}\dfrac{dt}{t^{x+1}}$.

$\sup\limits_{x\in]0,+\infty[}\left|\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p\displaystyle\int_p^{p+1}\dfrac{dt}{t^{x+1}}\right|\leq\sup\limits_{x\in]0,+\infty[}\displaystyle\int_{n+1}^{n+2}\dfrac{dt}{t^{x+1}}\leq\sup\limits_{x\in]0,+\infty[}\dfrac{1}{(n+1)^{x+1}}\leq\dfrac{1}{(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$

**La série** $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\displaystyle\int_p^{p+1}\dfrac{dt}{t^{x+1}}$ **converge donc uniformément sur** $]0,+\infty[$ **donc**

$\lim\limits_{x\to0}\sum\limits_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\displaystyle\int_p^{p+1}\dfrac{dt}{t^{x+1}}=\sum\limits_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\lim\limits_{x\to0}\displaystyle\int_p^{p+1}\dfrac{dt}{t^{x+1}}$

**de plus, la fonction** $(x,t)\mapsto\dfrac{1}{t^{x+1}}$ **est continue sur** $[0,+\infty[\times[p,p+1]$ **pour tout entier** $p\geq1$ **donc**

$\lim\limits_{x\to0}\displaystyle\int_p^{p+1}\dfrac{dt}{t^{x+1}}=\int_p^{p+1}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{t^{x+1}}\,dt=\int_p^{p+1}\dfrac{1}{t}\,dt=\ln\big(1+\dfrac{1}{p}\big)$

**Finalement, on a** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{q_0(x)-q_0(0)}{x}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\ln\big(1+\dfrac{1}{p}\big)$

$q_0$ **est bien dérivable en 0 avec** $q_0'(0)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\ln\big(1+\dfrac{1}{p}\big)$

**6)** $\sum_{p=1}^{2n}(-1)^p \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) = \ln\left(\frac{1.3.3.5.5...(2n-1)(2n-1)}{2.2.4.4.6...(2n-2).(2n-2).(2n)}\right)$

$= \ln\left(\frac{1.2.2.3.3.4.4.5.5...(2n-1)(2n-1).(2n).(2n)}{(2.2.4.4.6...(2n-2).(2n-2))^2.(2n)^3}\right) = \ln\left(\frac{(2n)!^2.(2n)}{2^{4n}n!^4}\right)$

**D'après la formule de Stirling**

$\frac{(2n)!^2.(2n)}{2^{4n}n!^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\left((2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}\right)^2.(2n)}{2^{4n}\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right)^4} = \frac{2}{\pi}$

**donc** $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{2n}(-1)^p \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) = \ln(\frac{2}{\pi})$

**La question précédente prouve la convergence de la série. On a donc** $\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) = \ln(\frac{2}{\pi})$

**FIN DU CORRIGE DU PROBLEME**